可制御正準形の導出

「動的システムの解析と制御」（後半：現代制御）担当 小林泰秀

平成 27 年 10 月 30 日

入力 u から出力 y までの伝達関数が

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{1}$$

と与えられたとします。状態空間表現の B 行列が

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

となるために、残りの行列 A と C がどうなるべきか考えます。そのために中間信号 x を考えて、u から x までの伝達関数を

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

とすると、

$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)X(s) = U(s) \tag{4}$$

より、次の微分方程式が成り立ちます。

$$x^{(3)} + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u \tag{5}$$

よって、状態変数を $\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$ とすれば、上式は次のように書けます。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{6}$$

ここで、望み通りの B 行列が得られていることに注意してください（こうなるように式 (3) をおいたということです）。またその結果、A 行列も可制御正準形と同じになりました。

一方、x と y の間には

$$Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)X(s) \tag{7}$$

より

$$y = b_2 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_0 x = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \tag{8}$$

が成り立ちます。つまり、C 行列も可制御正準形と同じものが得られました。

おまけ：同様に、

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

となるような状態空間表現を求めれば、可観測正準形が得られます。